خدیجه اقدامی‌مقدم، دبیر ریاضی بندر انزلی

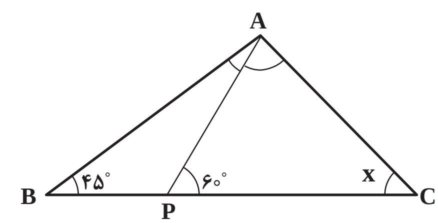
حل یک مسئلۀ چالش‌برانگیز هندسه به سه روش

منبع سؤال: (المپیاد ریاضی جمهوری دموکراتیک آلمان ـ سال ۱۹۶۴ ـ چاپ شده در کتاب «مسئله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف» ترجمه: پرویز شهریاری ـ انتشارات فردوس ـ چاپ سوم ـ ۱۳۷۶ـ تهران)

سؤال: نقطۀ P را روی ضلع BC از مثلث ABC طوری انتخاب کرده‌ایم که داشته باشیم: PC=۲BP.

زاویۀ ACB را پیدا کنید به شرطی که بدانیم:

$\widehat{ABC}=۴۵^\circ , \widehat{APC}=۶۰^\circ$



شکل ۱

حل

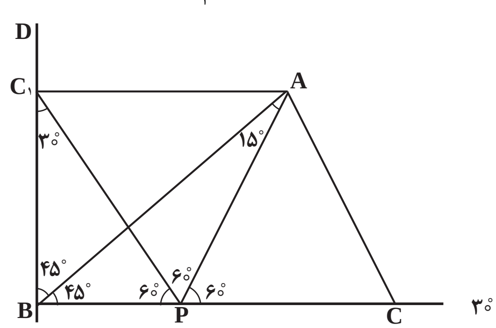
روش اول: راه‌حل موجود در کتاب منبع سؤال؛ با استفاده از ویژگی مثلث قائم‌الزاویه

نقطۀ $C_۱$ را قرینۀ نقطۀ C نسبت به خط راست AP در نظر می‌گیریم (شکل ۲).

داریم:

$C_۱P=CP=۲BP$

$\widehat{C_۱PB}=۱۸۰^\circ-\widehat{APC}-\widehat{APC_۱}=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ-۶۰^\circ=۶۰^\circ$



شکل ۲

بنابراین $\widehat{C_۱BP}=۹۰^\circ$ (زیرا مثلث $C_۱PB$ با مثلث قائم‌الزاویه به وتر ۲ و ضلع مجاور به زاویۀ قائمۀ ۱ متشابه است.)

یعنی BA نیمساز $\widehat{C_۱BP}$ است. به این ترتیب، نقطۀ A که از خط‌های راست $C_۱P$ ،PC و $C_۱B$ به یک فاصله است، بنابراین بر نیمساز زاویۀ $PC_۱D$ قرار دارد. (D بر امتداد پاره‌خط راست $BC_۱$ و بعد از $C_۱$ قرار گرفته است.) بنابراین:

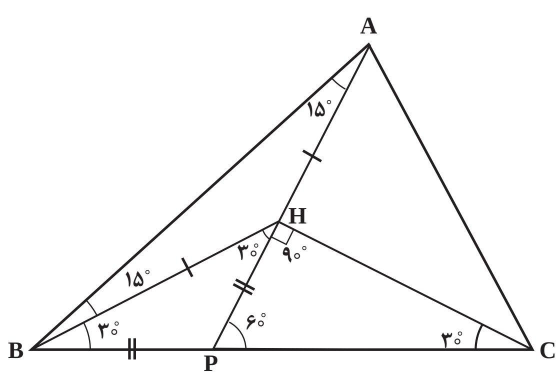
$$\widehat{ACB}=\widehat{AC_۱P}=\frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ-\widehat{BC_۱P})=\frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=۷۵^\circ$$

روش دوم: (روش اول ابتکاری؛ با استفاده از ویژگی مثلث قائم‌الزاویه)

$\widehat{ABP}=۴۵^\circ$ بنابر فرضیات و ۶۰° بودن $\widehat{APC}$ (زاویۀ خارجی)، که نتیجه می‌دهد:

$\widehat{BAP}=۱۵^\circ$

از نقطۀ C عمودی بر ضلع AP رسم می‌کنیم تا نقطۀ H روی ضلع AP ایجاد شود (شکل ۳).



شکل ۳

از آنجا که مثلث PHC قائم‌الزاویه است و داریم: $\widehat{HPC}=۶۰^\circ$، بنابراین: $\widehat{HCP}=۳۰^\circ$.

بنابر خواص مثلث قائم‌الزاویه با زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است، پس:

$$(۱)PH=\frac{۱}{۲}PC$$

همچنین طبق فرض داشتیم: $(۲)BP=\frac{۱}{۲}PC$. از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: BP=PH.

لذا مثلث BPH متساوی‌الساقین است و بنابر ۶۰° بودن $\widehat{HPC}$ (زاویهٔ خارجی) خواهیم داشت:

$$\widehat{HBP}=\widehat{BHP}=۳۰^\circ$$

بنابراین: $\widehat{ABH}=۴۵-۳۰=۱۵^\circ$ و بنابر ۱۵° بودن $\widehat{BAP}$ (بنا به فرض)، مثلث ABH متساوی‌الساقین خواهد شد. پس:

(۳) BH=HA

از طرف دیگر، مثلث BHC بنابر تساوی زوایای مجاور به دو ساق، متساوی‌الساقین خواهد شد و خواهیم داشت:

(۴) BH=HC

با توجه به (۳) و (۴) داریم: HA=HC و داشتیم: $\widehat{AHC}=۹۰^\circ$ (H پای ارتفاع). پس:

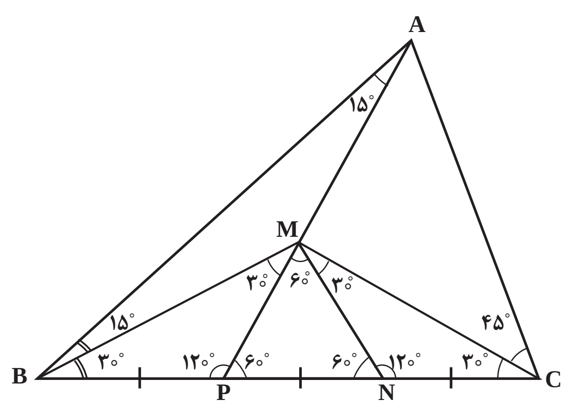
زوایای مجاور به دو ساق مثلث AHC برابر خواهند بود:

$$\widehat{HAC}=\widehat{ACH}=۴۵^\circ$$

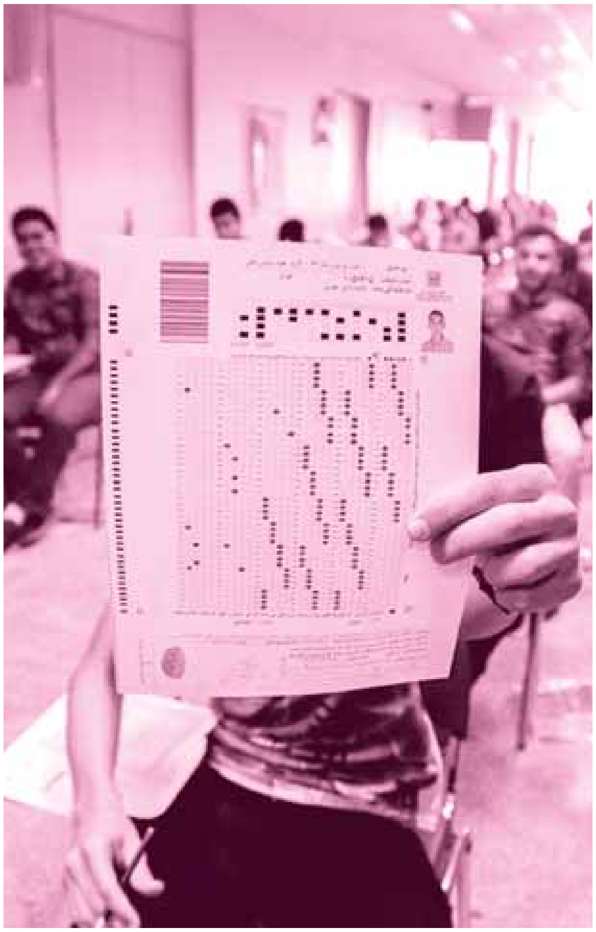
در نتیجه:

$$\widehat{ACB}=\widehat{ACH}+\widehat{HCP}=۴۵^\circ+۳۰^\circ=۷۵^\circ$$

روش سوم: **(روش دوم ابتکاری؛ با استفاده از خواص مثلث متساوی‌الساقین)**



شکل ۴



بنابر فرضیات و ۶۰° بودن $\widehat{APC}$ (زاویه خارجی) داریم: $\widehat{ABP}=۴۵^\circ$ که نتیجه می‌دهد:

$$(۱)\ \widehat{BAP}=۱۵^\circ$$

ابتدا از نقطه P روی ضلع PA به کمک پرگار، به اندازهٔ BP رسم می‌کنیم و نقطهٔ ایجاد شده را M می‌نامیم. داریم:

$$\widehat{BPM}=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ \text{ و } BP=PB\Rightarrow \Delta BMP\ \text{متساوی‌الساقین}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBP}=\widehat{PMB}=۳۰^\circ$$

از طرف دیگر، از نقطهٔ P به اندازهٔ BP روی ضلع PC جدا می‌کنیم و به نقطهٔ N می‌رسیم.

(می‌دانیم بنابر فرض مسئله، نقطهٔ N وسط پاره‌خط PC است.) بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{MPN}=۶۰^\circ\ \text{فرض}\\ BP=MP=PN\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta MPN\ \text{متساوی‌الاضلاع}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{PMN}=\widehat{PNM}=۶۰^\circ\\ MN=PN=MP=BP\ (۲)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} PN = NC \\ MN = PN \\ \quad (۲) \end{array}\right\} \Rightarrow MN = NC$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta MNC \quad \text{متساوی‌الساقین} \\ \widehat{MNC} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CMN} = \widehat{NCM} = ۳۰^\circ$$

حال در مثلث MBC داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{MBP} = ۳۰^\circ \\ \widehat{MCB} = ۳۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BMC \ \text{متساوی‌الساقین} \Rightarrow BM = MC \ (۳)$$

از طرف دیگر:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABM} = \widehat{ABC} - \widehat{MBC} = ۴۵^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵^\circ \\ ,\ (۱) \quad \widehat{BAP} = ۱۵^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \text{متساوی‌الساقین}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} BM = MA \\ ,\quad (۳) \end{array}\right\} \Rightarrow MA = MC \quad (۴)$$

و چون داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AMC} = ۱۸۰^\circ - (\widehat{PMN} + \widehat{CMN}) = ۱۸۰^\circ - (۶۰^\circ + ۳۰^\circ) = ۹۰^\circ \\ ,\quad (۴) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \Delta AMC \ \text{متساوی‌الساقین} \ \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ACM} = ۴۵^\circ$$

پس:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACM} + \widehat{MCN} = ۴۵^\circ + ۳۰^\circ = ۷۵^\circ$$

روش چهارم: (از هیئت تحریریهٔ برهان)

یادآوری‌ها:

۱. قضیهٔ سینوس‌ها: در هر مثلث نسبت هر دو ضلع به یکدیگر، برابر است با نسبت سینوس‌های زوایای مقابل به آن‌ها.

۲. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

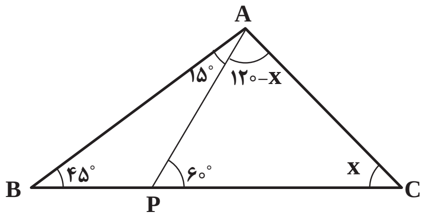
۳. نسبت‌های مثلثاتی زوایای °۱۵ و °۷۵:

$$\begin{cases} \sin ۱۵^\circ = \cos ۷۵^\circ = \dfrac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴} \\ \cos ۱۵^\circ = \sin ۷۵^\circ = \dfrac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan ۱۵^\circ = \cot ۷۵^\circ = ۲-\sqrt{۳} \\ \cot ۱۵^\circ = \tan ۷۵^\circ = ۲+\sqrt{۳} \end{cases}$$

حال در مثلث‌های APB و APC از قضیهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin ۴۵^\circ}{\sin ۱۵^\circ}, \frac{AP}{PC} = \frac{\sin x}{\sin(۱۲۰-x)}$$



شکل ۵

از تقسیم دو رابطهٔ فوق بر یکدیگر نتیجه می‌شود:

$$\frac{PC}{PB} = \frac{\sin ۴۵ \times \sin(۱۲۰ - x)}{\sin ۱۵ \times \sin x} = ۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(۱۲۰-x)}{\sin x} = \frac{۲\sin ۱۵}{\sin ۴۵}$$

$$= \frac{\dfrac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}}{\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sin ۱۲۰ \cos x - \cos ۱۲۰ \sin x}{\sin x} = \sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x + \dfrac{۱}{۲}\sin x}{\sin x} = \sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cot x + \frac{۱}{۲} = \sqrt{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cot x = \sqrt{۳} - \frac{۳}{۲} \Rightarrow \cot x = \frac{\sqrt{۳}-\dfrac{۳}{۲}}{\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۲-\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow x = ۷۵^\circ$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی که چون با ۲۰۱۶ عدد طبیعی متوالی بعد از خودش جمع شود، حاصل یک عدد مربع کامل شود، کدام است؟

الف) ۱۰۰۱

ب) ۱۰۰۶

ج) ۱۰۰۹

د) ۲۰۰۹

هـ) ۲۰۱۳